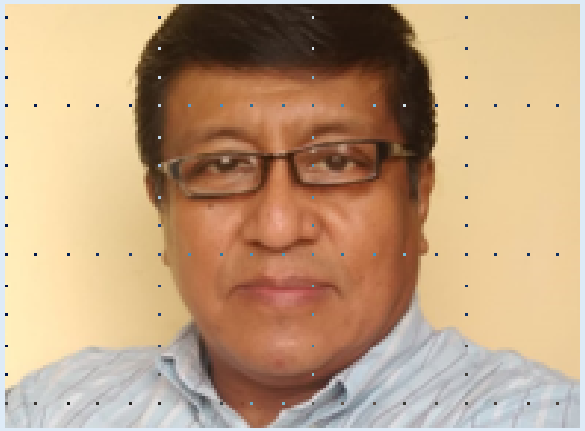
PITAGORAS ACADEMIA

ÁLGEBRA



Profesor
Freddy Ávalos C

FUNCIONES

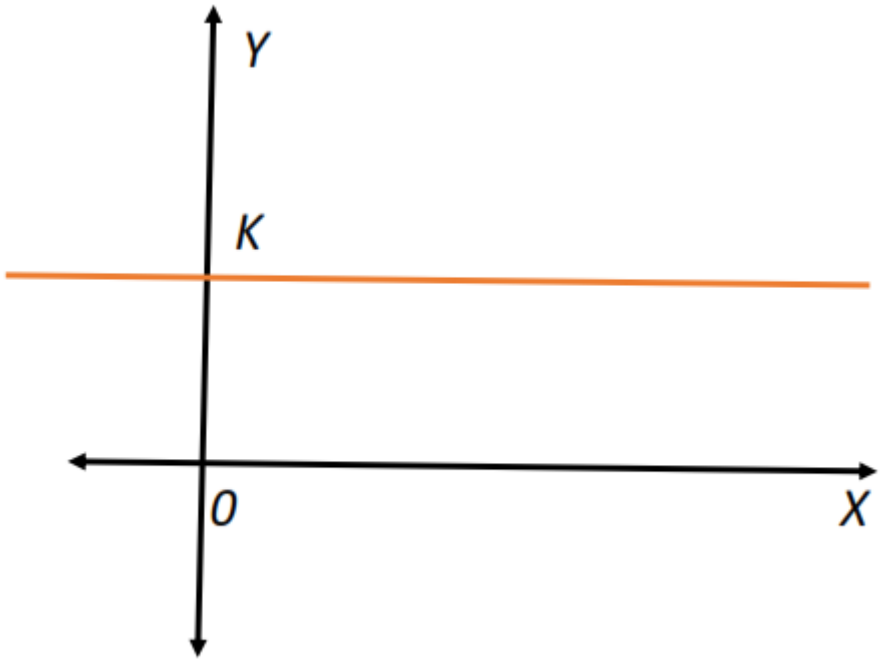
- **FUNCIONES ESPECIALES**

FUNCIONES ESPECIALES

FUNCIÓN CONSTANTE

Regla de correspondencia: $f(x) = k$

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$
- $\text{Ran} f = \{k\}$
- Su gráfica es una recta paralela al eje X

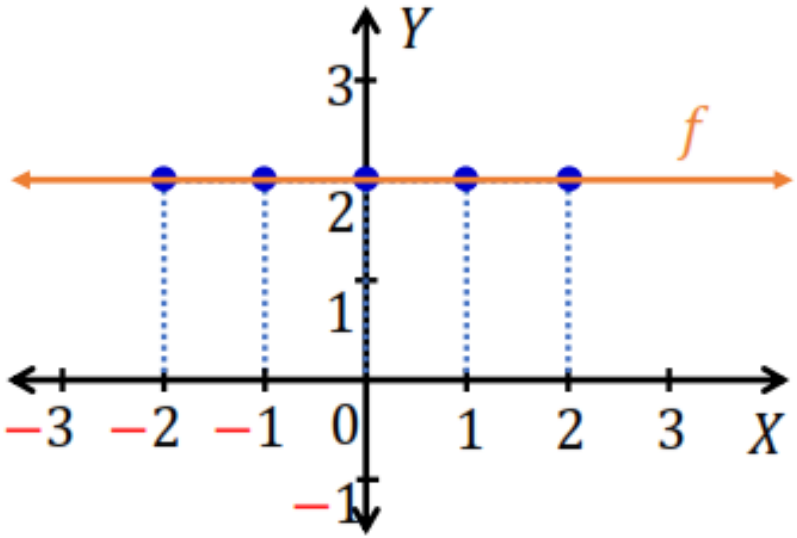


FUNCIONES ESPECIALES

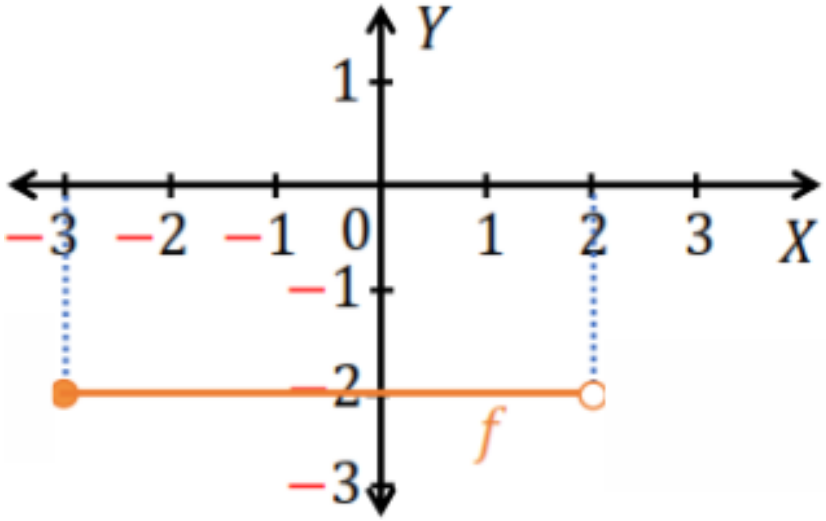
Ejemplos

Grafique $f(x) = 2$

x	$f(x)$
0	2
1	2
2	2
-1	2
-2	2

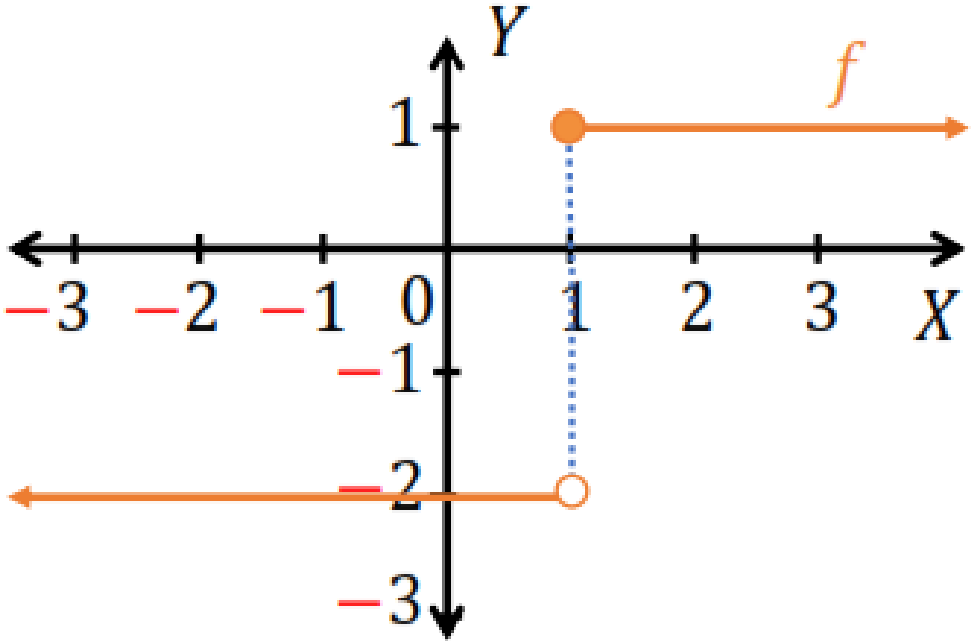


Grafique $f(x) = -2$, x Є[-3 : 2>



FUNCIONES ESPECIALES

Grafique $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ -2, & x < 1 \end{cases}$



FUNCIONES ESPECIALES

FUNCIÓN LINEAL

Regla de correspondencia: $\boxed{f(x) = ax + b}$ $a \neq 0$

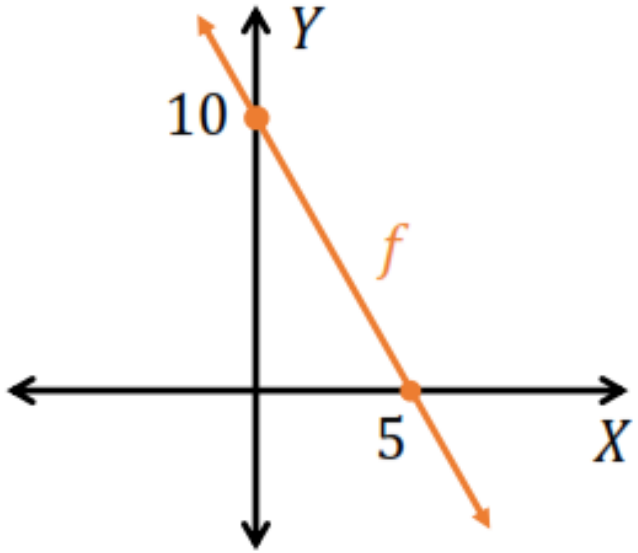
- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\text{Ran} f = \mathbb{R}$
- Su gráfica es una recta no paralela a los ejes.
- Solo se necesita **dos puntos** para trazar una **recta**

Ejemplo

Grafique $f(x) = -2x + 10$

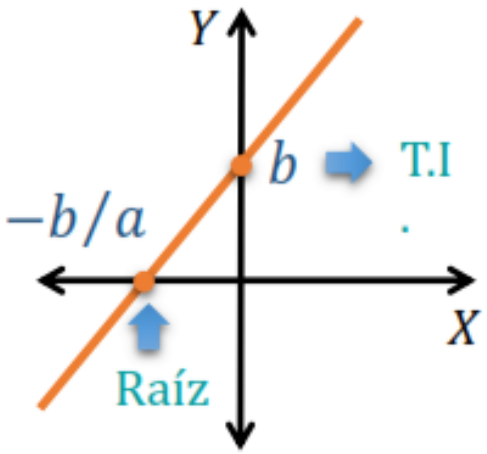
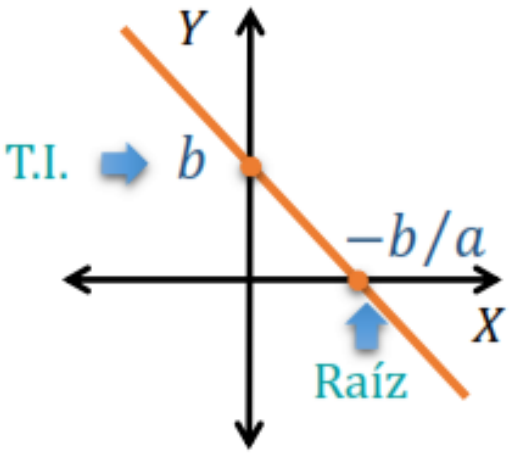
Tabulando

x	$f(x)$
0	10
5	0



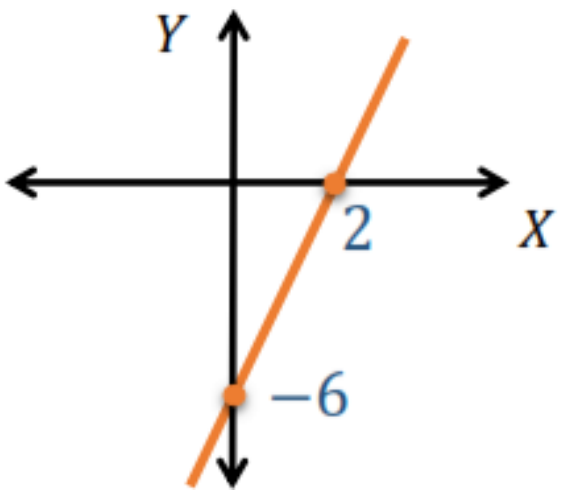
FUNCIONES ESPECIALES

En general: Sea $f_{(x)} = ax + b; \quad a \neq 0$

$a > 0$	$a < 0$
	
Función creciente	Función decreciente

FUNCIONES ESPECIALES

Grafique $f_{(x)} = 3x - 6$

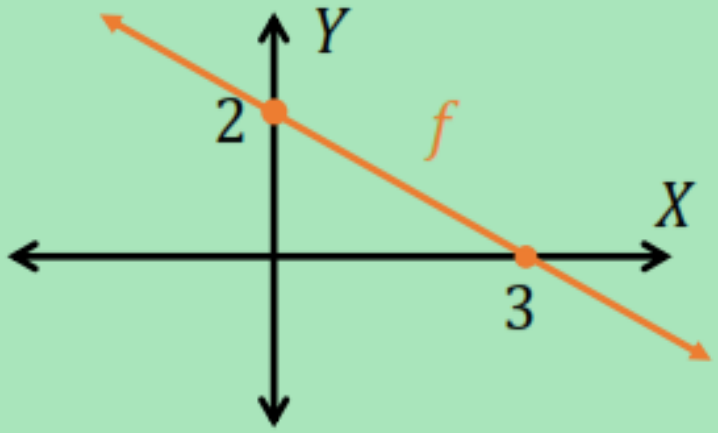


T.I.$= -6$ *(EJE Y)*

Raíz $= 2$ *(EJE X)*

Ejemplo

Determine $f(x)$ cuya gráfica es la siguiente



Resolución:

La gráfica es una recta no paralela a los ejes entonces $f(x)$ es un polinomio lineal:

$$f(x) = ax + b$$

T.I.=Corte con Y $\rightarrow$ $b = 2$

Raíz=Corte con X $\rightarrow$ $f(3) = 0$

$\rightarrow a \cdot 3 + b = 0 \quad \rightarrow a = -\dfrac{2}{3}$

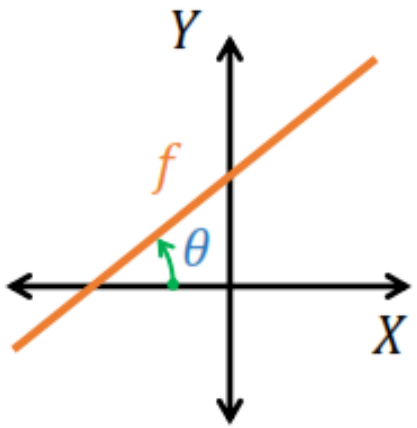
$$\therefore \quad f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

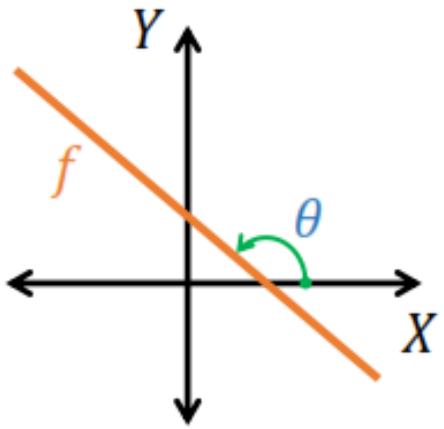
FUNCIONES ESPECIALES

PENDIENTE DE LA RECTA

Es la tangente del ángulo trigonométrico positivo formado por el eje X y la recta.

Sea $f_{(x)} = mx + b; \quad m \neq 0$

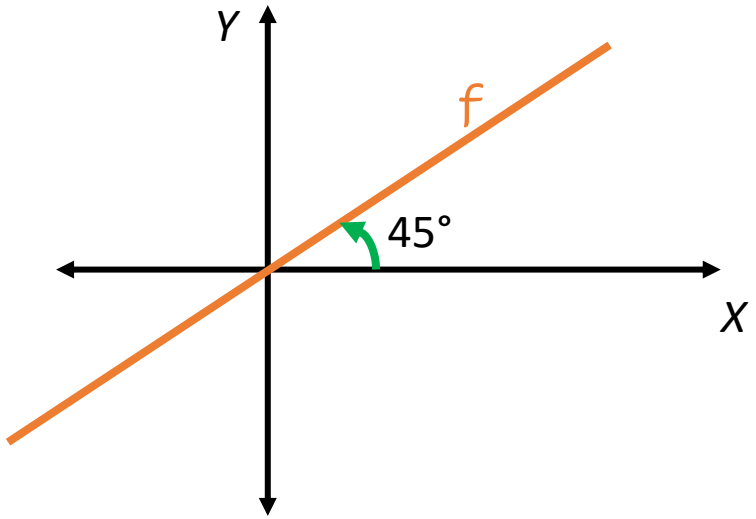




Pendiente $= \tan\theta \rightarrow \boxed{m = \tan\theta}$

Si $m = 1$ y $b = 0 \rightarrow$ F es la FUNCION IDENTIDAD

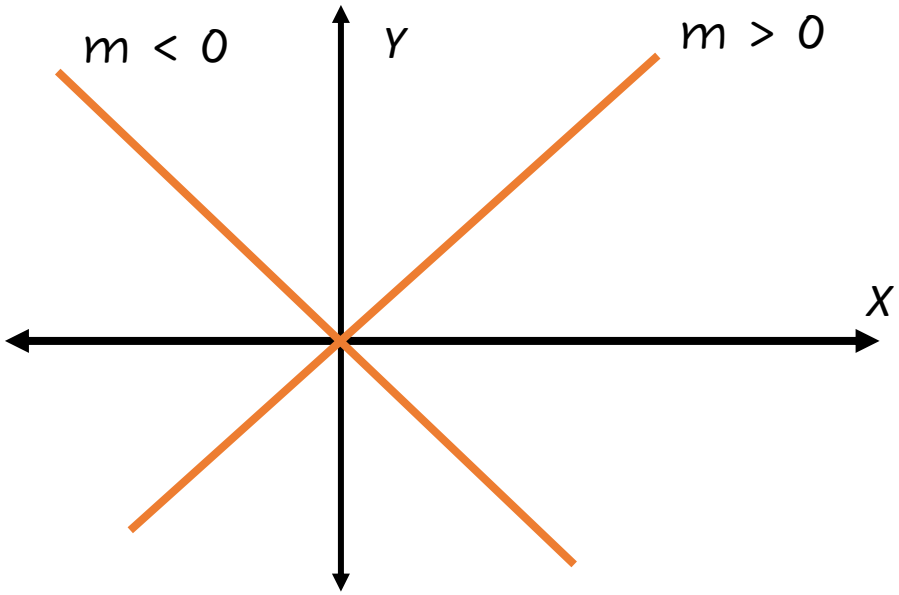
$\boxed{y = f(x) = x}$



FUNCION DE PROPORCIONALIDAD

Regla de correspondencia: $f(x) = m\,x$ $\quad m \in R - \{0\,;\,1\}$

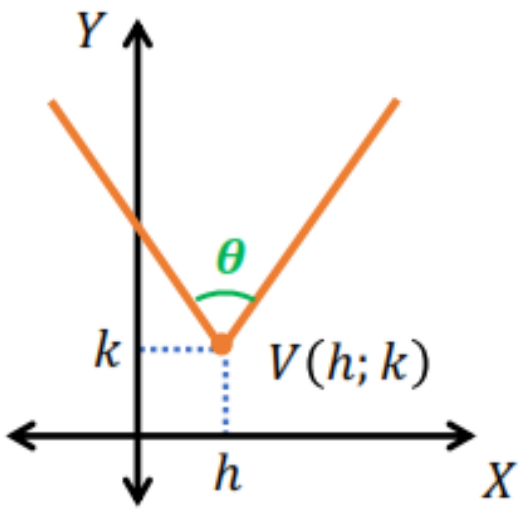
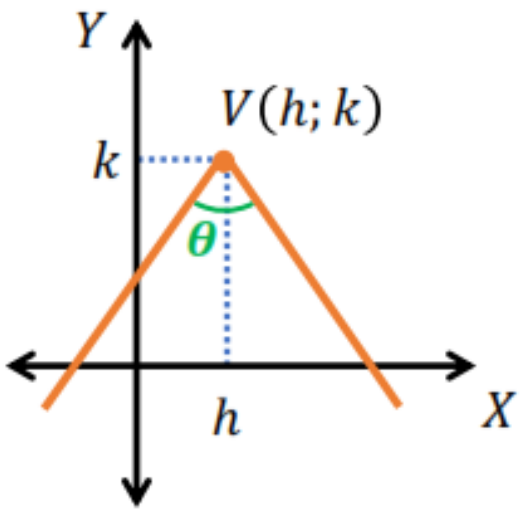
- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\mathrm{Ran} f = \mathbb{R}$
- Su grafica es una recta que pasa por el origen de coordenadas pero no hace un ángulo de 45°



FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

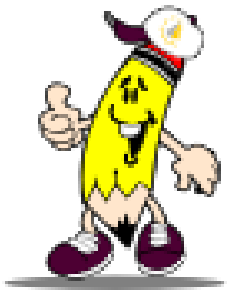
Regla de correspondencia: $f(x) = a|x - h| + k$ $\quad a \neq 0$

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\mathrm{Ran} f \subset \mathbb{R}$
- Su gráfica tiene la forma de una uve cuyo vértice esta ubicada en $V = (h; k)$

Si $a > 0$	Si $a < 0$
	

FUNCIONES ESPECIALES

Nota:
Si $a = \pm 1 \rightarrow \theta = 90°$



Coordenadas del vértice: $(1; 4)$

Como $a = -2$, la gráfica se abre hacia abajo.

- Corte con el eje Y : $x = 0$

$$f(0) = -2|0 - 1| + 4 = 2$$

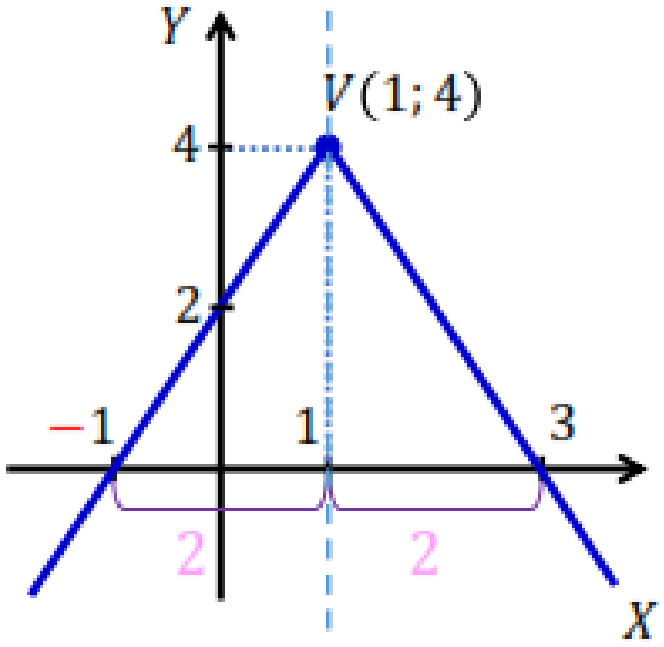
- Corte con el eje X : $f(x) = 0$

$$-2|x - 1| + 4 = 0 \rightarrow 2 = |x - 1|$$

$$\rightarrow x = 3 \vee x = -1$$

Ejercicio

Grafique $f(x) = -2|x - 1| + 4$

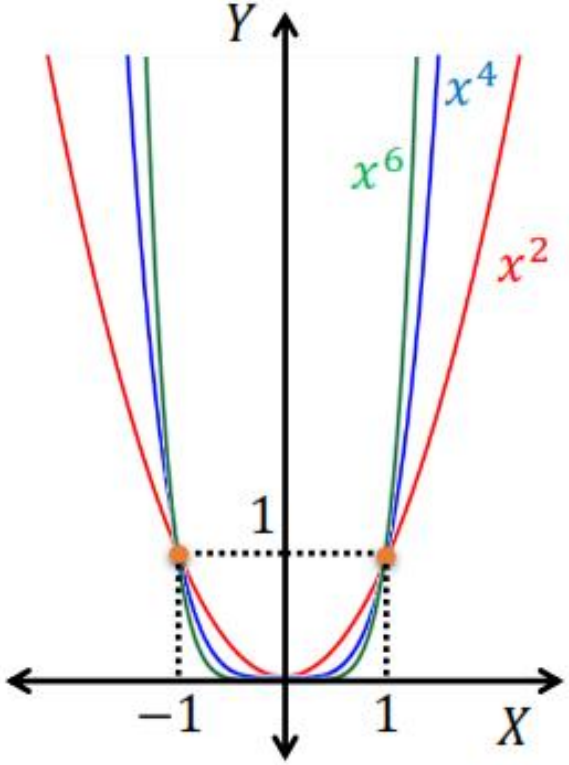


Eje de simetría

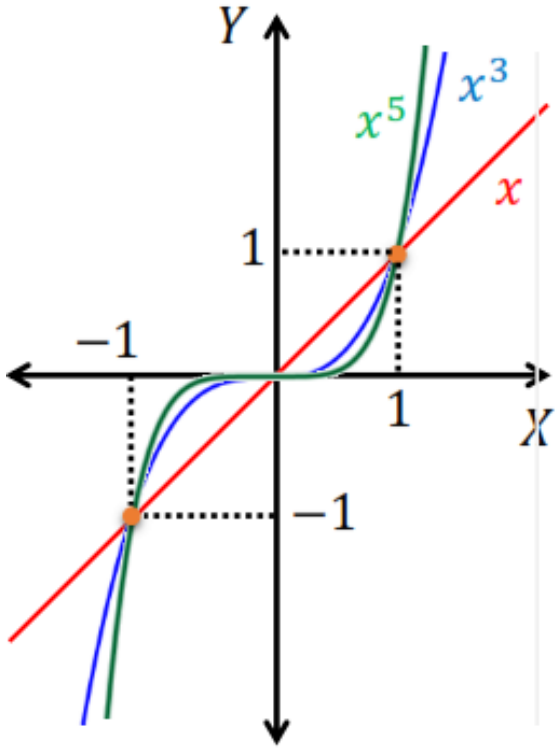
FUNCIÓN POTENCIAL

Regla de correspondencia: $f(x) = x^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)



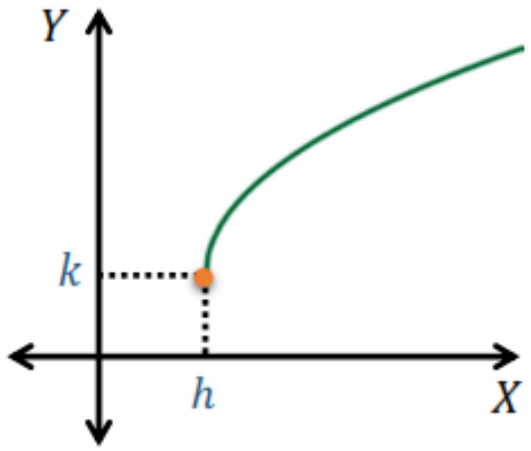
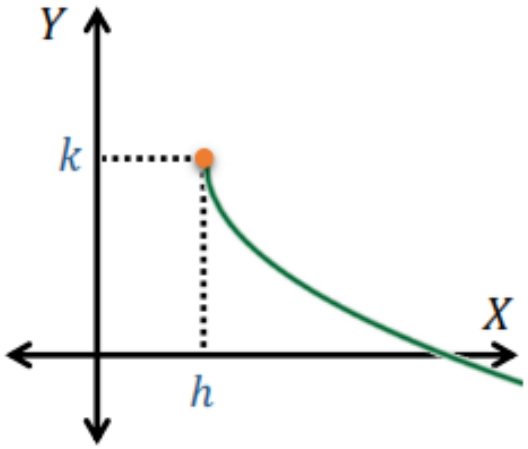
- $\text{Ran} f = \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}_0^+$



FUNCIÓN RAIZ CUADRADA

$$f(x) = a\sqrt{x-h} + k \qquad a \neq 0$$

- $\text{Dom} f = [h; +\infty\rangle$ (si no es dato)
- Su gráfica es una media parábola horizontal de vértice $V = (h; k)$.

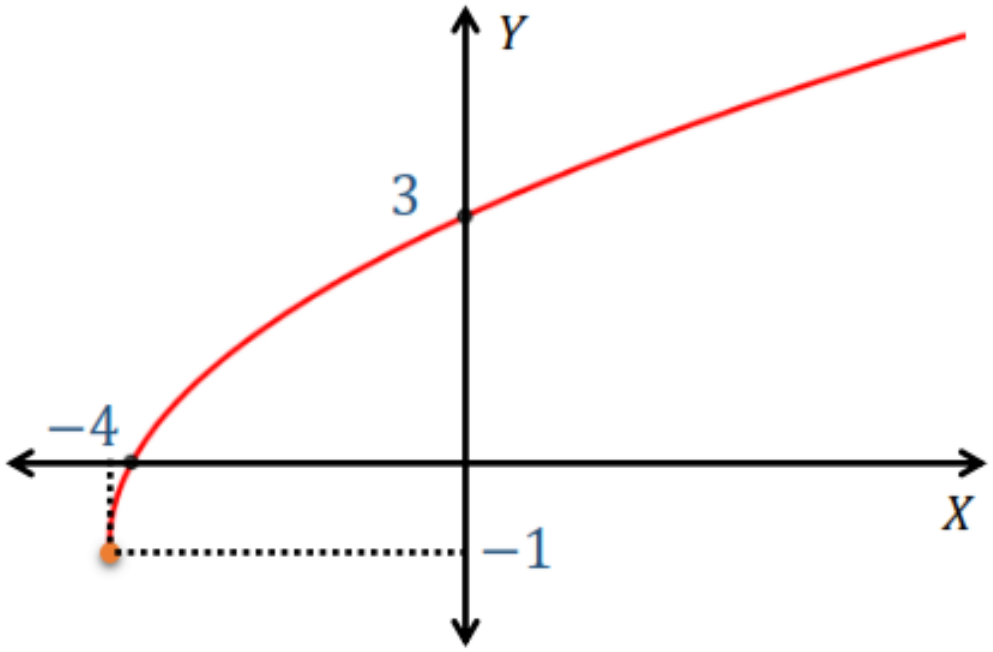
$a > 0$	$a < 0$
	

FUNCIONES ESPECIALES

Ejercicio

Grafique $f_{(x)} = 2\sqrt{x+4} - 1$

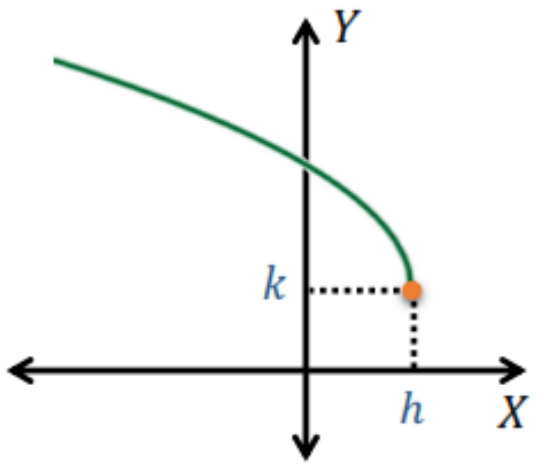
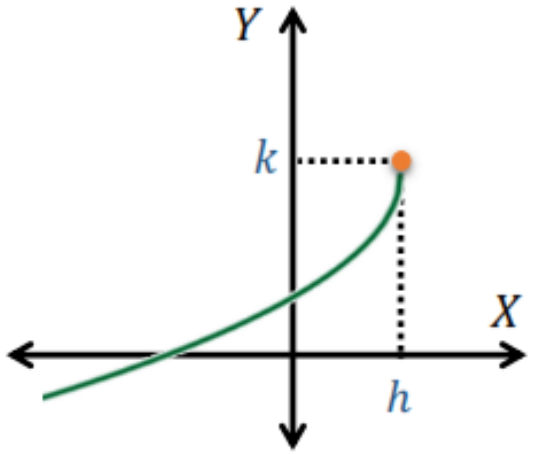
- $\text{Dom} f = [-4; +\infty\rangle$
- Su vértice $V = (-4; -1)$
- Su gráfica es la parte superior de la parábola, pues $a = 2$
- Corte con el eje Y $f(0) = 3$
- $\text{Ran} f = [-1; +\infty\rangle$



FUNCIONES ESPECIALES

$$f(x) = a\sqrt{-x+h} + k \qquad a \neq 0$$

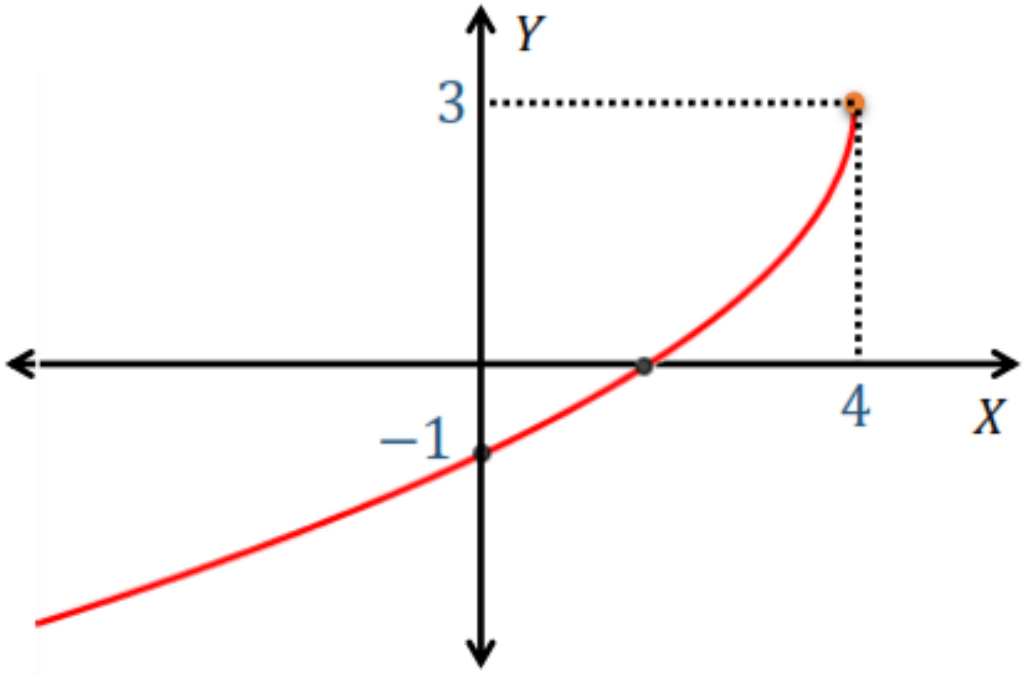
- $\text{Dom} f = \langle -\infty; h]$ (si no es dato)
- Su gráfica es una media parábola horizontal abierta a la izquierda de vértice $V = (h; k)$

$a > 0$	$a < 0$
	

FUNCIONES ESPECIALES

Grafique $f_{(x)} = -2\sqrt{-x+4} + 3$

- $\text{Dom} f = \langle -\infty; 4]$
- Su vértice $V = (4; 3)$
- Su gráfica es la parte inferior de la parábola, pues $a = -2$
- Corte con el eje Y $f(0) = -1$
- $\text{Ran} f = \langle -\infty; 3]$



FUNCIÓN CUADRÁTICA

Regla de correspondencia: $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ $a \neq 0$

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\mathrm{Ran} f \subset \mathbb{R}$
- Su gráfica es una parábola vertical.
- Para graficarlo es conveniente conocer las coordenadas de su vértice, para ello en $f(x)$ completemos cuadrados y se obtiene

$$f_{(x)} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

vértice: $\boxed{\mathrm{V} = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)}$

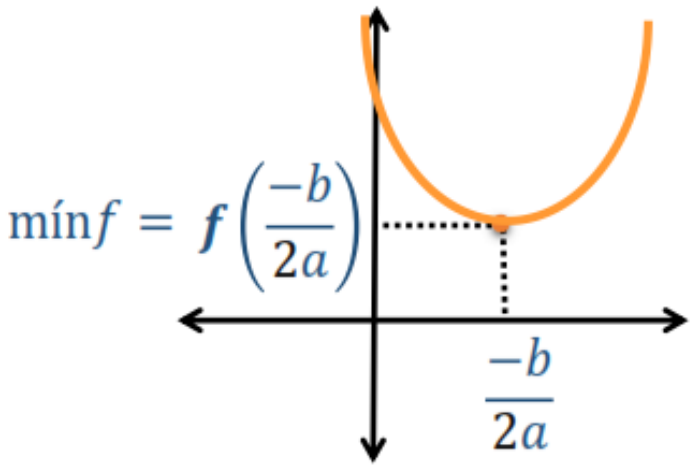
equivalente $\boxed{\mathrm{V} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)}$

donde x_1 y x_2 son las raíces de $f(x)$

FUNCIONES ESPECIALES

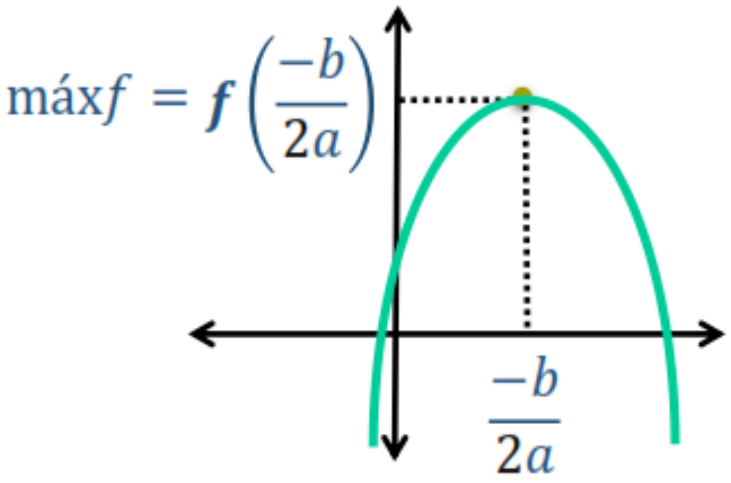
Grafiquemos considerando dos casos:

I) $a > 0$ Parábola cóncava hacia arriba



$$\text{Ran} f = \left[f\left(\frac{-b}{2a}\right); +\infty\right\rangle$$

II) $a < 0$ Parábola cóncava hacia abajo



$$\text{Ran} f = \left\langle -\infty; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$$

FUNCIONES ESPECIALES

Ejercicio

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Completando cuadrados $f_{(x)} = (x-1)^2 - 4$

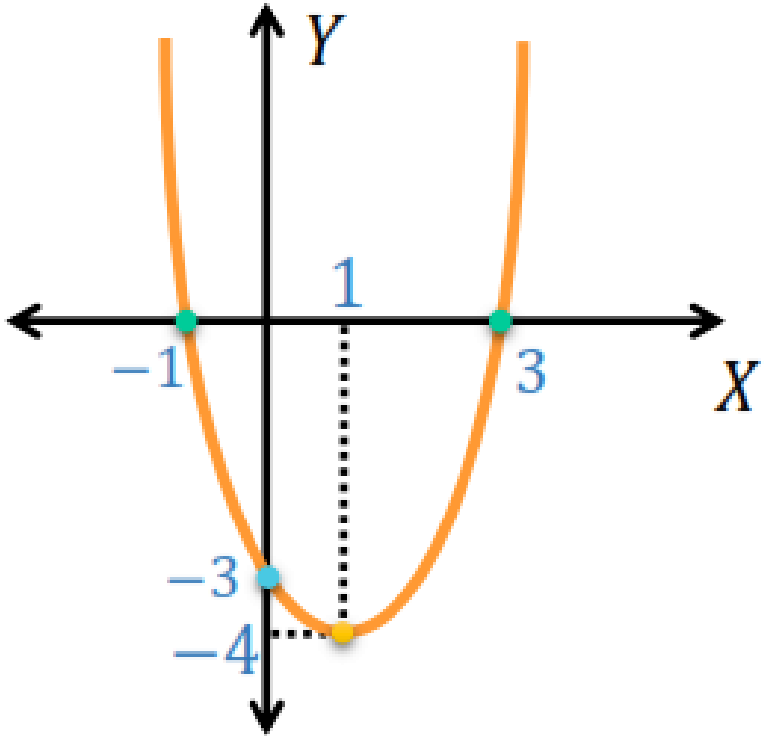
su vértice es $V = (1; -4)$

- Hallemos el punto de corte con el eje Y

$x = 0$

$f_{(0)} = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3$

$f_{(0)} = -3$



FUNCIONES ESPECIALES

Ejercicio

Halle los rangos de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 - 4x - 3\,, \qquad g(x) = -x^2 + 3x - 1$$

Ambas funciones tienen como dominio a $\mathbb{R}$

- f se abre hacia arriba porque su coeficiente principal positivos

$$\text{Ran}f = \left[f\left(\frac{-b}{2a}\right); +\infty\right\rangle = \left[f\left(\frac{4}{2\cdot 1}\right); +\infty\right\rangle$$

$$= [f(2); +\infty\rangle \;= [-7; +\infty\rangle$$

- g se abre hacia abajo porque su coeficiente principal negativo

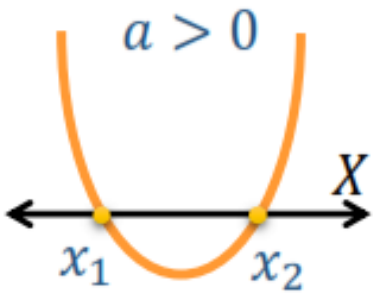
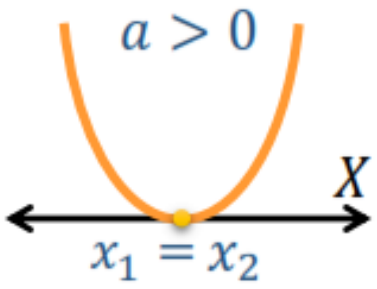
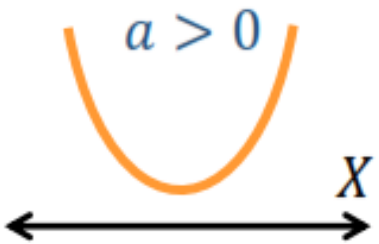
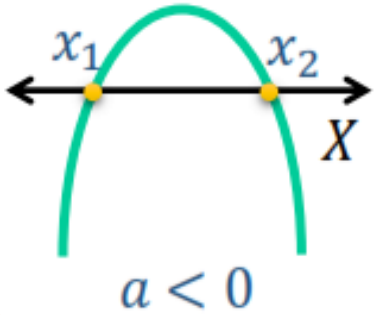
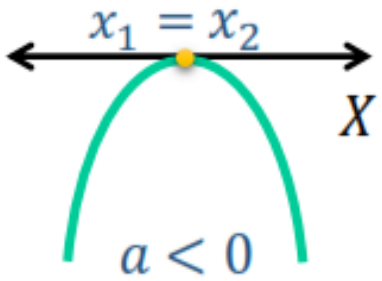
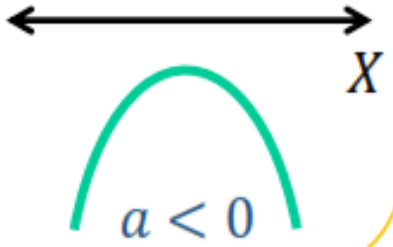
$$\text{Ran}g = \left\langle -\infty; g\left(\frac{-b}{2a}\right)\right] = \left\langle -\infty; g\left(\frac{-3}{2(-1)}\right)\right]$$

$$= \left\langle -\infty; g\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \left\langle -\infty; \frac{5}{4}\right]$$

FUNCIONES ESPECIALES

PROPIEDADES

Sea $f_{(x)} = ax^2 + bx + c\,;\ a \neq 0$

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Las raíces son reales diferentes	Las raíces son reales e iguales	Las raíces no son reales
		
		

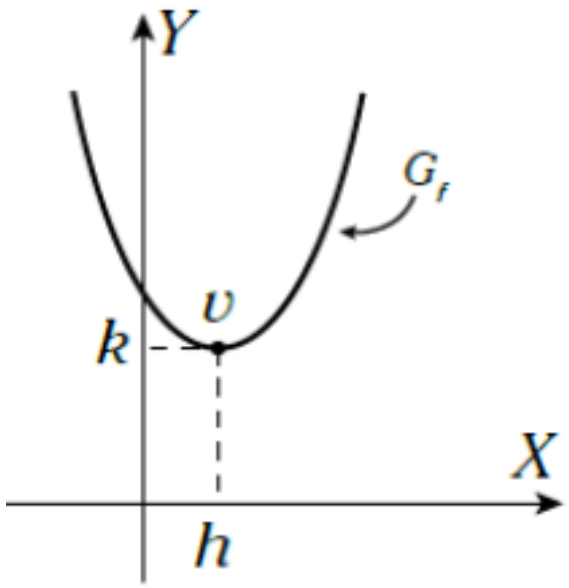
FUNCIONES ESPECIALES

Ejercicio

Según el gráfico de

$$f_{(x)} = x^2 + 2x - m + 20$$

Halle la variación de m.



El gráfico no corta al eje X $\rightarrow$ $\Delta < 0$

$$(2)^2 - 4(-m + 20) < 0$$

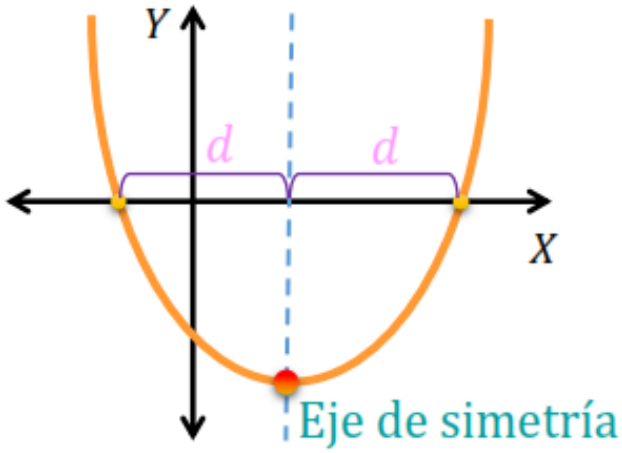
$$\rightarrow \quad 1 + m - 20 < 0$$

$$\rightarrow \quad m < 19$$

$$\therefore \quad m \in \langle -\infty; 19 \rangle$$

Observación

Si trazamos una recta vertical que pasa por el vértice, esta divide a la parábola en partes **simétricas**.



FUNCIÓN FRACCIONARIA

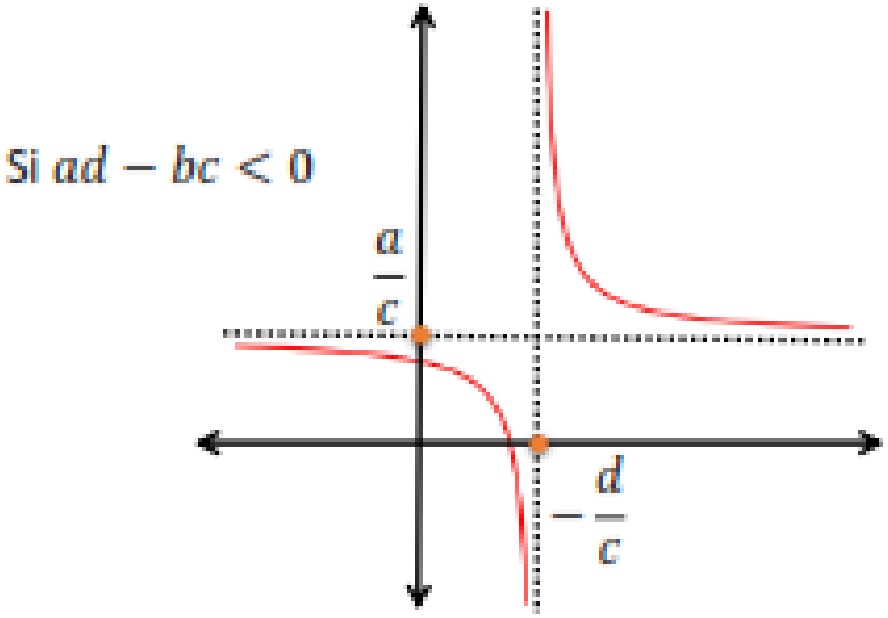
Regla de correspondencia: $\boxed{f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$ $\quad c \neq 0$

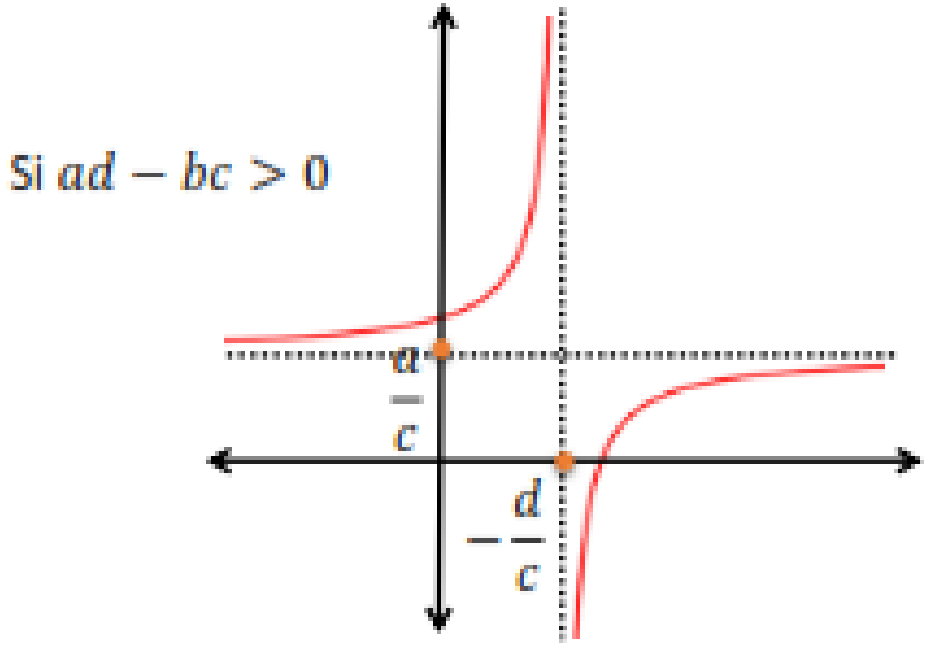
- $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ (si no es dato)
- Su gráfica es una hipérbola.
- Para graficarlo ubica sus asíntotas $\begin{cases} y = \dfrac{a}{c} \\ x = -\dfrac{d}{c} \end{cases}$

FUNCIONES ESPECIALES

Si $ad - bc < 0$

Si $ad - bc > 0$





- Se observa que la función es decreciente o creciente en $\left\langle -\infty; -\frac{d}{c} \right\rangle$ o en $\left\langle -\frac{d}{c}; +\infty \right\rangle$

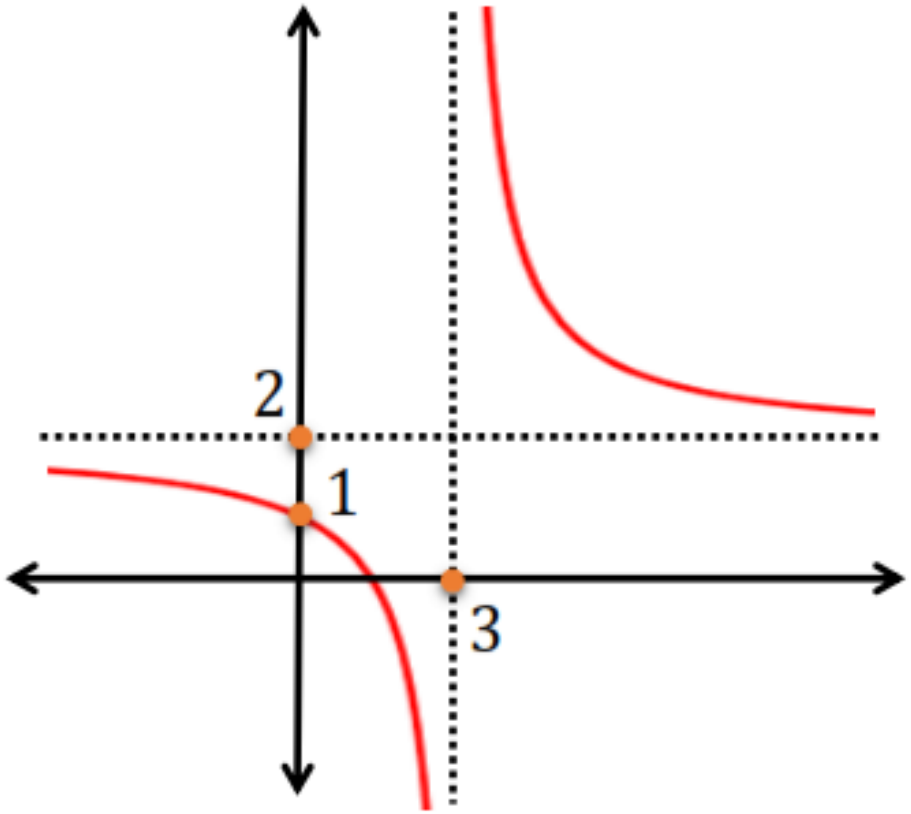
- $\text{Ran} f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$
- Corte con el eje Y $\quad f(0) = \frac{b}{d}$
- Corte con el eje X $\quad x = -\frac{b}{a}$

FUNCIONES ESPECIALES

Ejercicio

Grafique $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-3}$

- Asíntota horizontal $y = \dfrac{2}{1}$
- Asíntota horizontal $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$
- Corte con el eje Y $f(0) = 1$

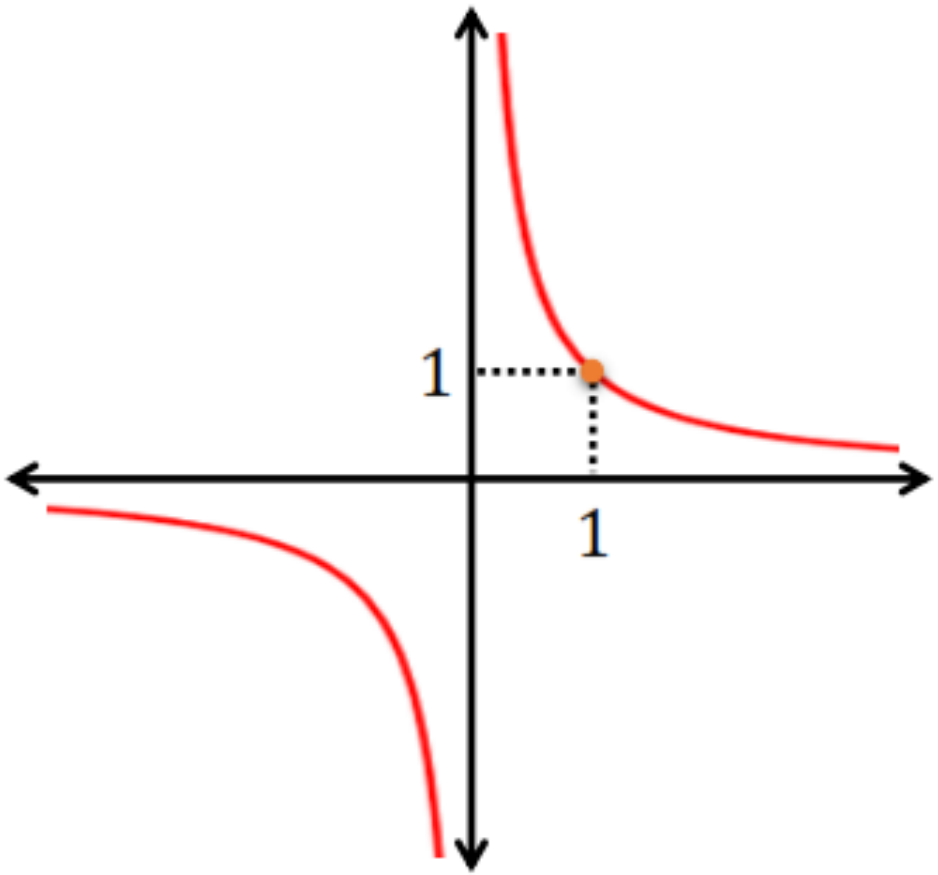


FUNCIONES ESPECIALES

Ejercicio

Grafique $G(x) = \frac{1}{x} = \frac{0x+1}{x+0}$

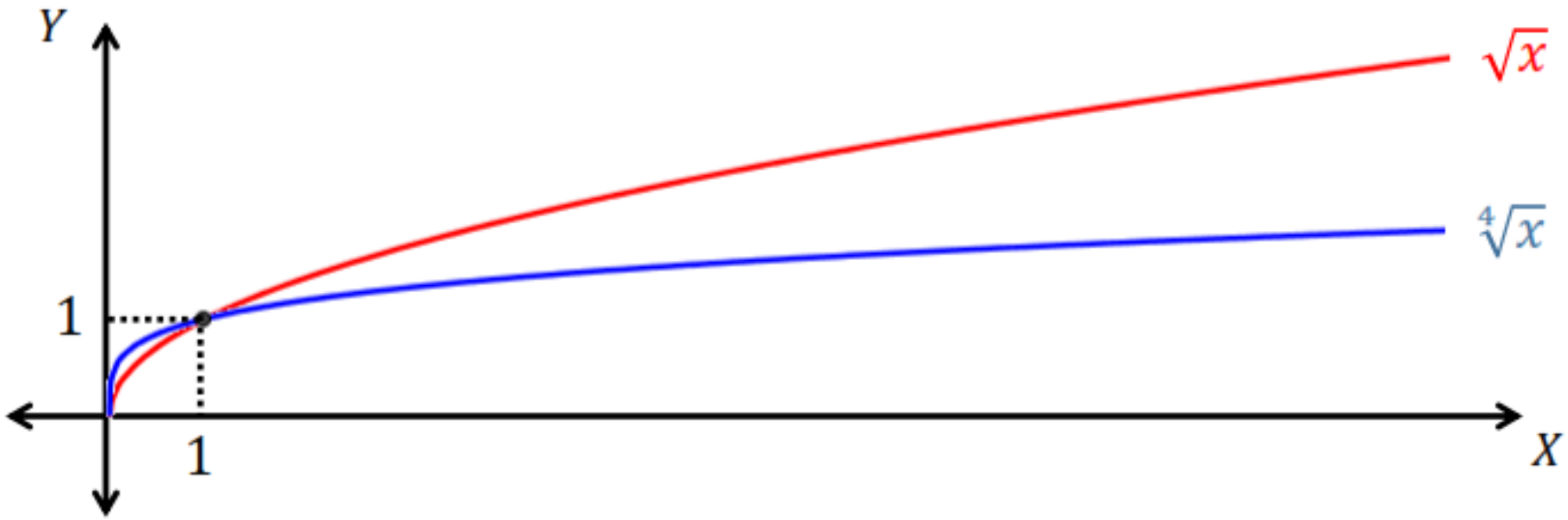
- Asíntota horizontal $y = \frac{0}{1}$ (eje X)
- Asíntota horizontal $x + 0 = 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y)
- Se observa que $(1;1) \in G$



FUNCIONES IRRACIONALES NOTABLES

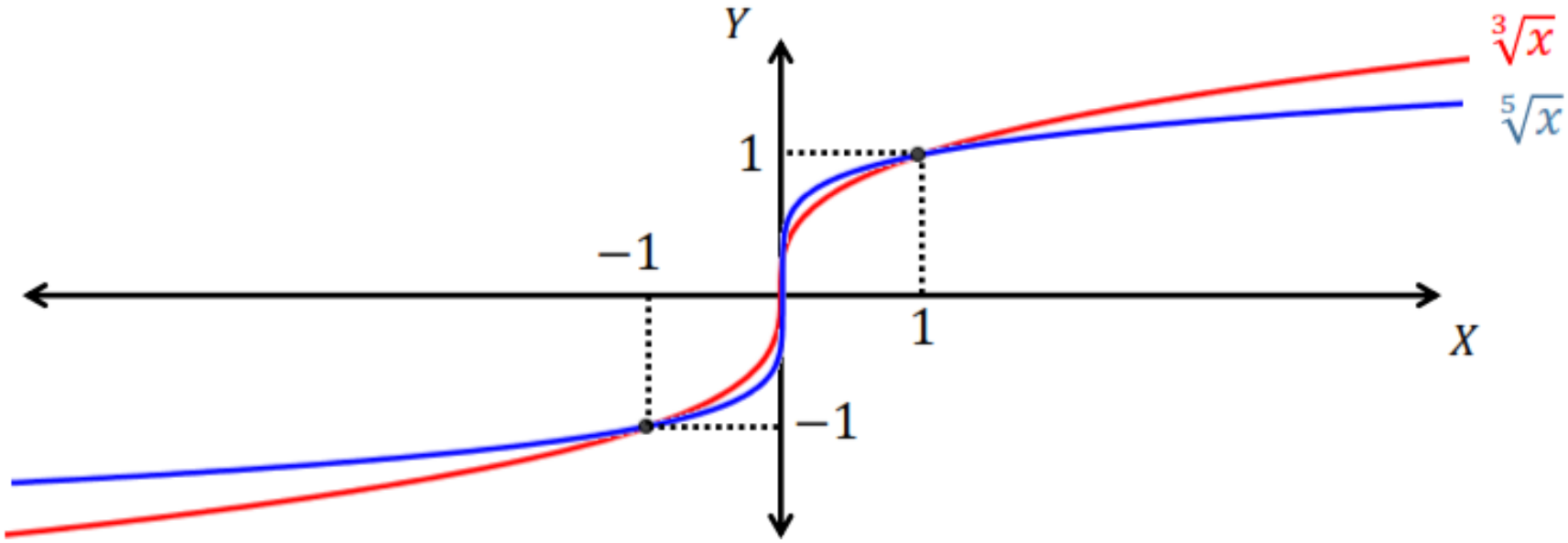
$$f(x) = \sqrt[n]{x} \qquad n \in \mathbb{N} - \{1\}$$

- n par



FUNCIONES ESPECIALES

- n impar



FUNCIONES ESPECIALES

1. Sea la función: $F: \underbrace{\mathbb{R} \longrightarrow \{k\}}$ además: $\dfrac{F(4)+5}{F(20)-4} = 2$

Halle el valor de $F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(100)$

A) 13 B) 100 C) 1 D) 1300

Solución: Como se observa que la función es constante, entonces su regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = k$$

Por dato: $\dfrac{F(4)+5}{F(20)-4} = 2$

$$\frac{k+5}{k-4} = 2 \quad \longrightarrow k+5 = 2k-8$$

$$\longrightarrow \quad k = 13$$

Entonces: $y = F(x) = 13$

Nos piden: $F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(100)$

$$13+13+13+\cdots.13+13 \quad \ldots(100\ sumandos)$$

$$13(100) = 1300$$

FUNCIONES ESPECIALES

2. Sea la función identidad $G(x) = (m-1)x^{n-10}$

Halle el dominio de $H(x) = \frac{x^2+4x-\sqrt{2}}{x-mn}$

$A)\mathbb{R}-\{11\}$ $B)\mathbb{R}-\{22\}$ $C)\mathbb{R}-\{-11\}$ $D)\mathbb{R}-\{-22\}$

Solución:

Como la función es la función identidad: $G(x) = x$

Por dato: $G(x) = (m-1)x^{n-10}$

$*m-1=1 \quad \longrightarrow \quad m=2$

$*n-10=1 \quad \longrightarrow n=11$

Nos piden el dominio de:

$$H(x) = \frac{x^2+4x-\sqrt{2}}{x-mn}$$

Reemplazando:

$$H(x) = \frac{x^2+4x-\sqrt{2}}{x-22}$$

Para que H exista:

$$x-22 \neq 0$$

Por lo tanto el dominio:

$$x \; e \; \mathbb{R}-\{22\} = Dom(H)$$

3. Sea la función lineal tal que: $H(3) = 5 \quad \wedge \quad H(8) = 10$

Halle dicha función

$A) H(x) = x - 2 \qquad B) H(x) = 2x + 1 \qquad C) H(x) = x + 2 \qquad D) H(x) = -x + 2$

Solución:

Como la función es lineal: $H(x) = ax + b$

Entonces por dato: $*H(3) = 5$

$\longrightarrow a(3) + b = 5$

$3a + b = 5 \ldots (I)$

$*H(8) = 10$

$\longrightarrow a(8) + b = 10$

$8a + b = 10 \ldots (II)$

De (I) y (II): $a = 1 \quad \wedge \quad b = 2$

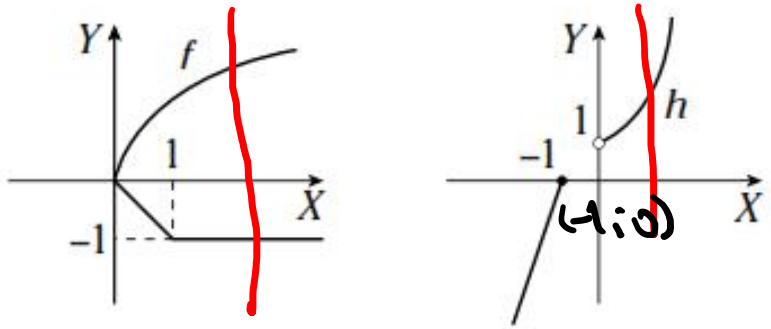
Por lo tanto: $H(x) = ax + b$

$H(x) = x + 2$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

1. Dadas las siguientes gráficas:



indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. f es una relación y h es una función. ✓

II. $\text{Ran}f=[-1;+\infty\rangle \wedge \text{Dom}h=\langle-\infty;-1]\cup\langle 0;+\infty\rangle$ ✓

III. $h_{(f_{(1)})}=0$

A) VVV B) VFV C) FVF
D) FFF E) VFF

SOLUCIÓN:

I) f es relación y h es función (V)

II) $\text{Ran}(f)=[-1;+\infty\rangle$

$\text{Dom}(h)=\langle-\infty;-1]\cup\langle 0;+\infty\rangle$ (V)

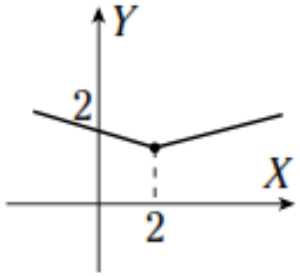
III) $h(\underbrace{f(1)}_{-1})=0 \rightarrow h(-1)=0$ (V)

$\therefore$ VVV

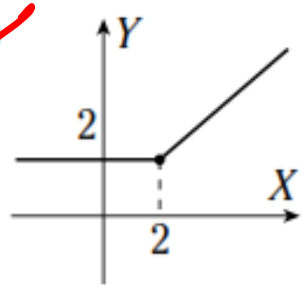
2. Esboce la gráfica de la función f tal que

$$f_{(x)} = \begin{cases} 2; \text{ si } x < 2 \\ x; \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

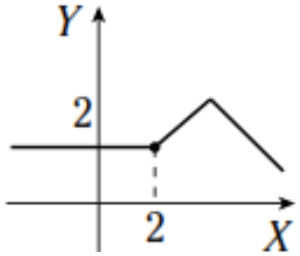
A)



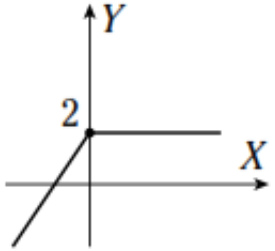
B)



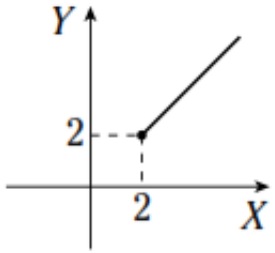
C)



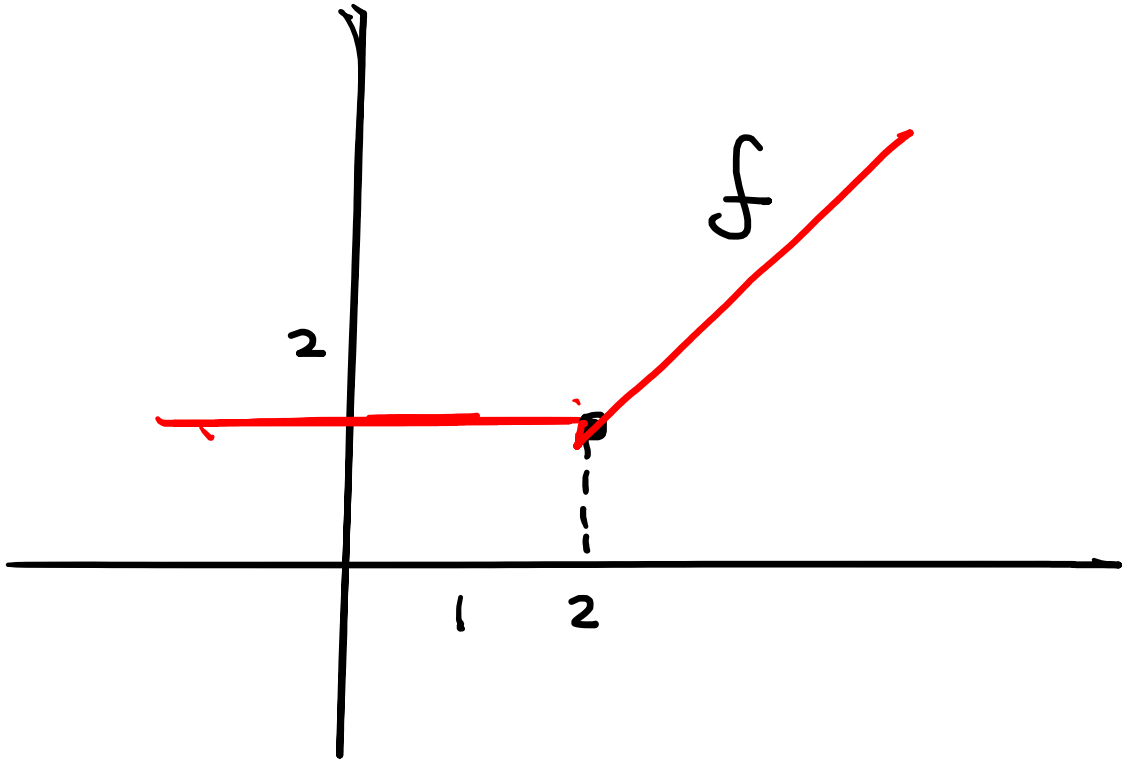
D)



E)

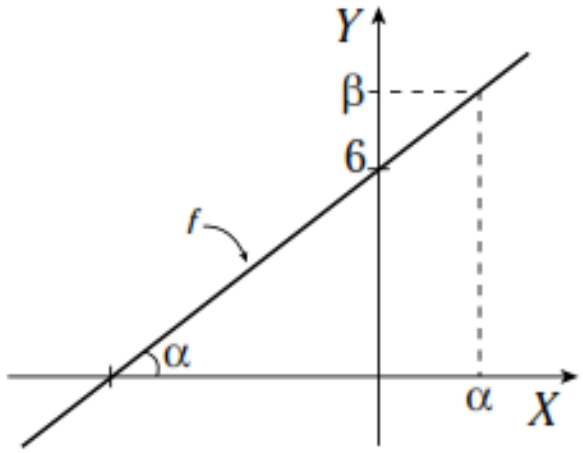


SOLUCIÓN



CLAVE B

3. Dada la gráfica de la función lineal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Si $\alpha = \dfrac{37°}{2}$ y $(15; \beta) \in f$, halle β.

A) 11 B) 10 C) 16
D) 13 E) 12

Solución:

$f(x) = ax + b$

$\hookrightarrow b = 6$

$f(x) = ax + 6$

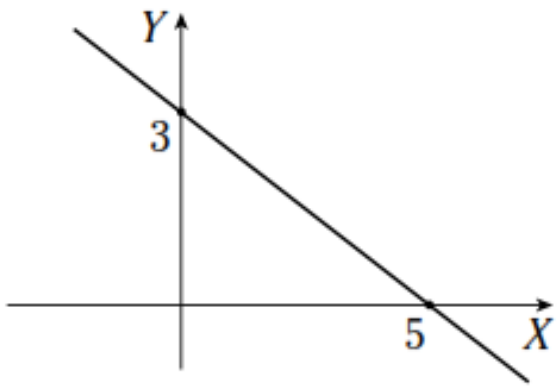
$a = tg\left(\frac{37}{2}\right) = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{1}{3}$

$\rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x + 6$

Si $(15; \beta) \in f \rightarrow \beta = \frac{1}{3}(15) + 6$

$\therefore \beta = 11$

4. Si la gráfica de $P_{(x)}=ax+b$ es



indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. El término independiente de P es 3. (V)

II. La raíz del polinomio P es 5. (V)

III. $ab=-\frac{9}{5}$ (V)

A) VFV B) VVF C) VVV

D) FVF E) FFF

Solución

$b=3$

$P(x)=ax+3$

$P(5)=0 \rightarrow 5a+b=0$

$5a+3=0$

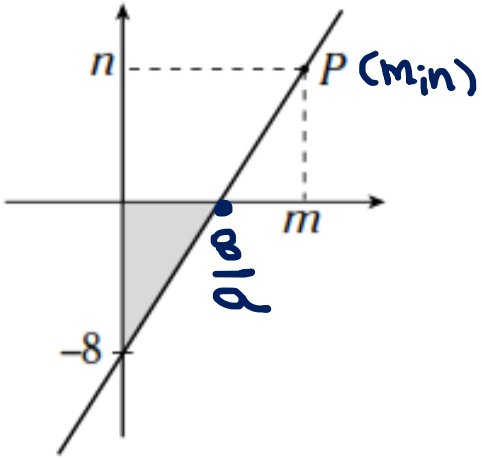
$a=-3/5$

Luego:

$P(x)=-\frac{3}{5}x+3$

$\therefore ab=-9/5$

5. Sea $f_{(x)}=ax+b$ una función lineal cuya gráfica es la siguiente:



Si el área de la región sombreada es 16 u^2 y $m+n=10$, halle P.

A) (4; 6) B) (8; 2) C) (6; 4)

D) $\left(\frac{17}{2};\frac{3}{2}\right)$ E) $\left(\frac{15}{2};\frac{5}{2}\right)$

Solución:

$b=-8 \rightarrow f(x)=ax-8=0$

$x=\frac{8}{a}$

Luego

$S=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{a}\right)(8)=16$

$64=32a \rightarrow \boxed{a=2}$ ✓

Luego: $\boxed{f(x)=2x-8}$

$n=2m-8 \ldots (1)$

pero $m+n=10$

$m+2m-8=10$

$3m=18$

$m=6;\ n=4$

$\therefore P=(6;4)$

6. Dadas las funciones
$f_{(x)}=x^2+8x+16$ y $g_{(x)}=x^2-10x+25$
si P y Q son los vértices de f y g, respectivamente, halle la distancia entre los vértices.

A) 5 B) 9 C) 7
D) 12 E) 8

Solución

Para f:

$f(x) = x^2+8x+16 = (x+4)^2$

$y = (x+4)^2$

$\rightarrow V_f = (-4;0)$

Para g:

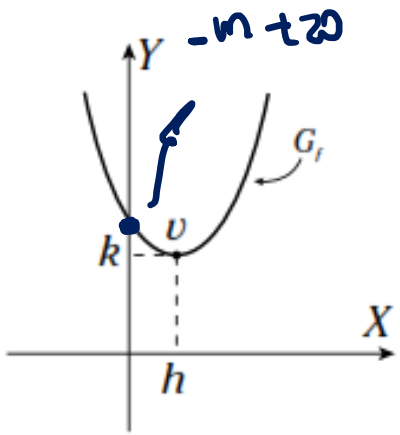
$g(x) = x^2-10x+25 = (x-5)^2$

$y = (x-5)^2$

$\rightarrow \boxed{V_g = (5;0)}$

$d_{\overline{V_f V_g}} = \sqrt{(5+4)^2+(0)^2} = 9$

7. Sea G_f la gráfica de la función $f_{(x)}=x^2+2mx^2-m+20$



Halle la variación de m.

A) $\langle -5; 4\rangle$ B) $\langle 0; 4\rangle$ C) $\langle 0; +\infty\rangle$
D) $\langle 0; 20\rangle$ E) $\langle -5; 0\rangle$

Solución

f no intersecta al eje x $\rightarrow$ $\Delta<0$ $\wedge$ $-m+20>0$

$(2m)^2-4(1)(-m+20)<0$

$m<20$ ---- ②

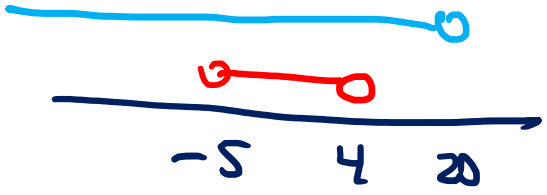
$\cancel{4}m^2-\cancel{4}(-m+20)<0$

① $\cap$ ②

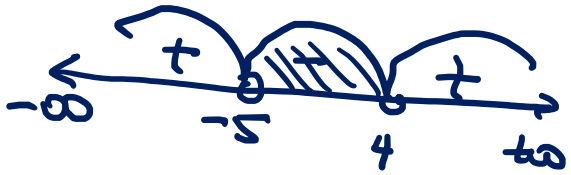
$\rightarrow$ $m^2+m-20<0$

factorizando:

$(m+5)(m-4)<0$



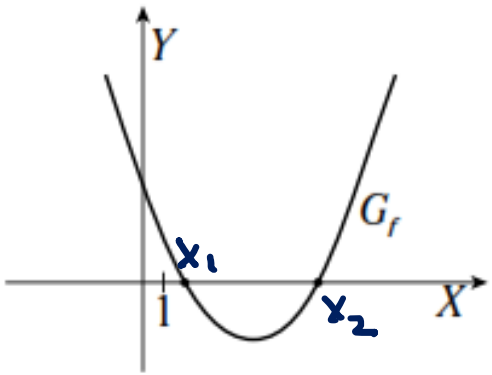
$\therefore$ $m\in\langle -5;4\rangle$



$m\in\langle -5;4\rangle$ --- ①

8. Sea G_f la gráfica de la función

$f_{(x)}=x^2+mx+9$



Determine la variación de m.

A) $\langle -10; -6\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle$
B) $\langle -\infty; -6\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle$
C) $\langle 6; +\infty\rangle$
D) $\langle -6; 6\rangle \cup \langle 10; +\infty\rangle$
E) $\langle -6; 6\rangle$

SOLUCIÓN:

f intersecta al eje x en 2 puntos $\rightarrow \Delta > 0$

$m^2 - 4(1)(9) > 0$

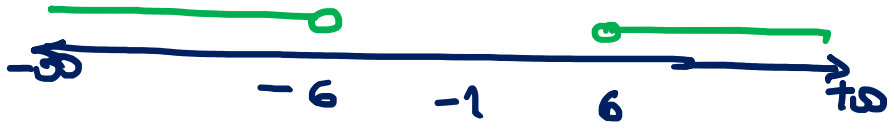
$m^2 > 36$

$|m| > 6$

$m < -6 \vee m > 6 \quad \wedge \quad \underbrace{x_1 + x_2}_{-m} > 1$

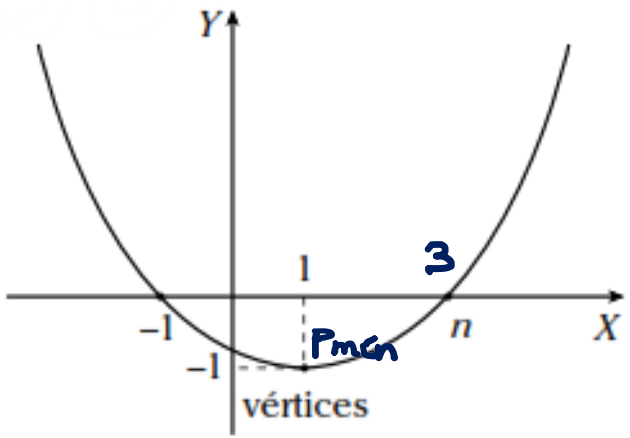
$-m > 1$

$\rightarrow m < -6 \vee m > 6 \quad \wedge \quad m < -1$



$\therefore m \in \langle -\infty; -6\rangle$

9. Si la gráfica del polinomio $P_{(x)}=ax^2+bx+c$ es la que se muestra a continuación



indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $n=3$ ✓

II -1 y 3 son las raíces de $P_{(x)}$. ✓

III. El mínimo valor de $P_{(x)}$ es -1. ✓

IV. $-\dfrac{b}{a}=2 \wedge \dfrac{c}{a}=-3$ ✓

A) VFVF B) VVFF C) VVVF

D) FVFV E) VVVV

SOLUCIÓN:

Del gráfico: $V=(1;-1)$

$\rightarrow P_{(x)}=a(x-1)^2-1$

Además -1 es una raíz $\rightarrow P(-1)=0$

$a(-1-1)^2-1=0 \rightarrow a=\frac{1}{4}$

$\rightarrow \boxed{P_{(x)}=\frac{1}{4}(x-1)^2-1}$

$\frac{1}{4}(x-1)^2-1=0 \rightarrow (x-1)^2=4 \begin{cases} x-1=2 \rightarrow x_1=3 \\ x-1=-2 \rightarrow x_2=-1 \end{cases}$

$P_{(x)}=\underset{a}{\frac{1}{4}}x^2-\underset{b}{\frac{1}{2}}x-\underset{c}{\frac{3}{4}}$

$-\frac{b}{a}=-\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2 \wedge \frac{c}{a}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=-3$

$\therefore$ VVVV

FUNCIONES ESPECIALES

10. Se define la función signo (sgn)

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1; & x>0\\ 0; & x=0\\ -1; & x<0\end{cases}$$

indique la gráfica de la función $f_{(x)}=\operatorname{sgn}(x^2-1)$.

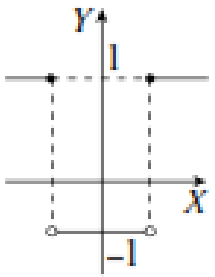
$$f(x)=\operatorname{Sgn}(x)=\begin{cases}-1; & x<0\\ 0; & x=0\\ 1; & x>0\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R} \wedge R_f=\{-1;0;1\}$

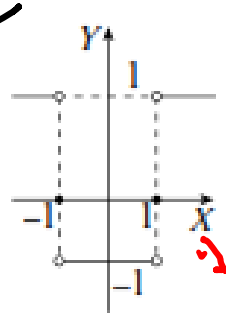
$$f(x)=\operatorname{Sgn}(x^2-1)=\begin{cases}-1; & x^2-1<0\\ 0; & x^2-1=0\\ 1; & x^2-1>0\end{cases}$$

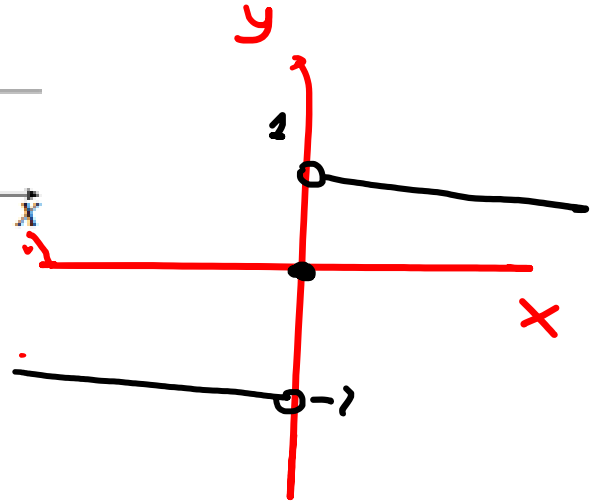
$$f(x)=\operatorname{Sgn}(x^2-1)=\begin{cases}-1; & -1<x<1\\ 0; & x=-1 \vee x=1\\ 1; & x<-1 \vee x>1\end{cases}$$

A)

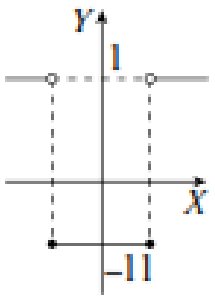


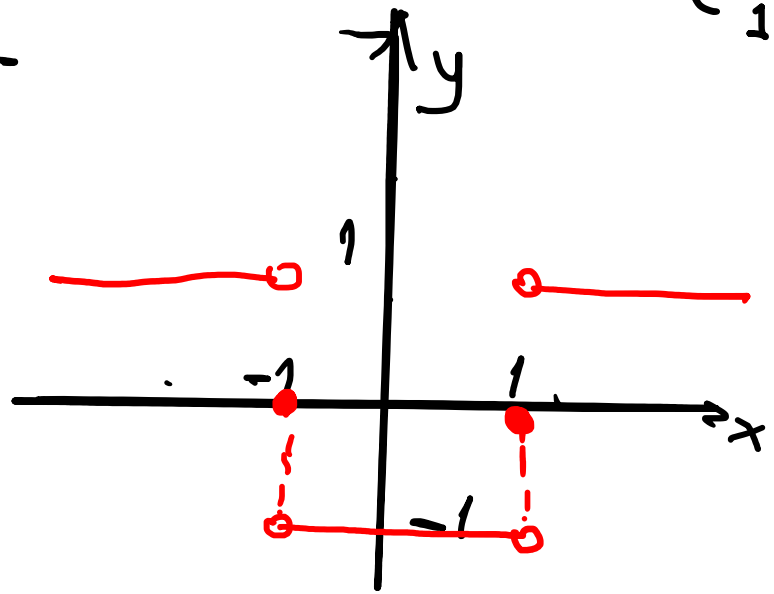
~~B)~~



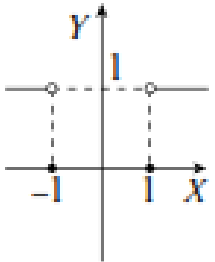


C)

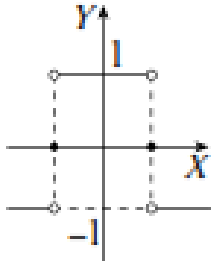




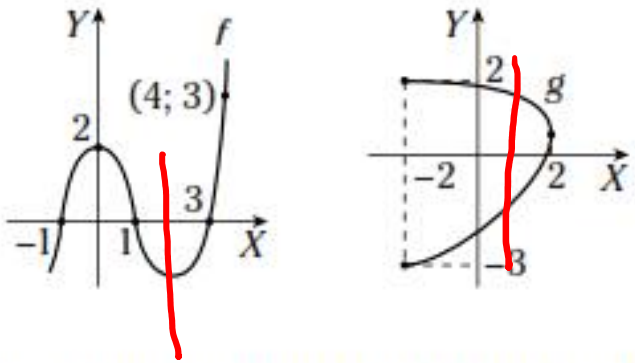
D)



E)



1. Dadas las siguientes gráficas:



∴ VVV

indique la secuencia de verdad (V) o falsedad (F).

I. f es una función y g es una relación. V

II. $f_{(4)}=3$; $f_{(3)}=0$; $f_{(0)}=2$ V

III. Dom $g=[-2; 2]$; Ran $g=[-3; 2]$ V

A) VFF B) VVV C) VVF

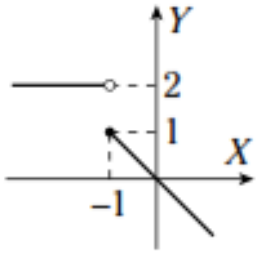
D) FFF E) FVV

FUNCIONES ESPECIALES

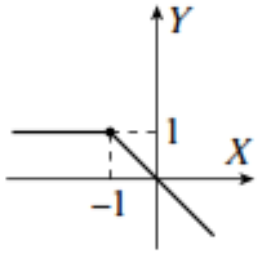
2. Esboce la gráfica de f tal que

$$f_{(x)} = \begin{cases} -x; \text{ si } x \geq -1 \\ 2; \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

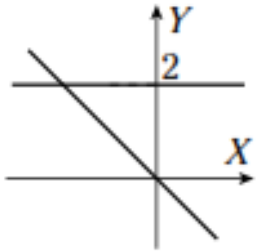
A)



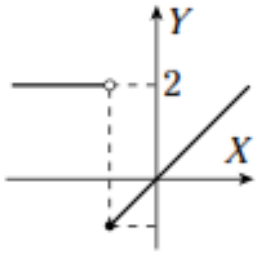
B)



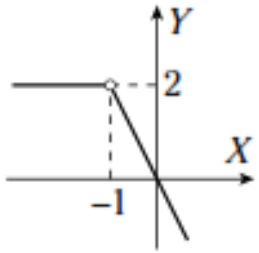
C)

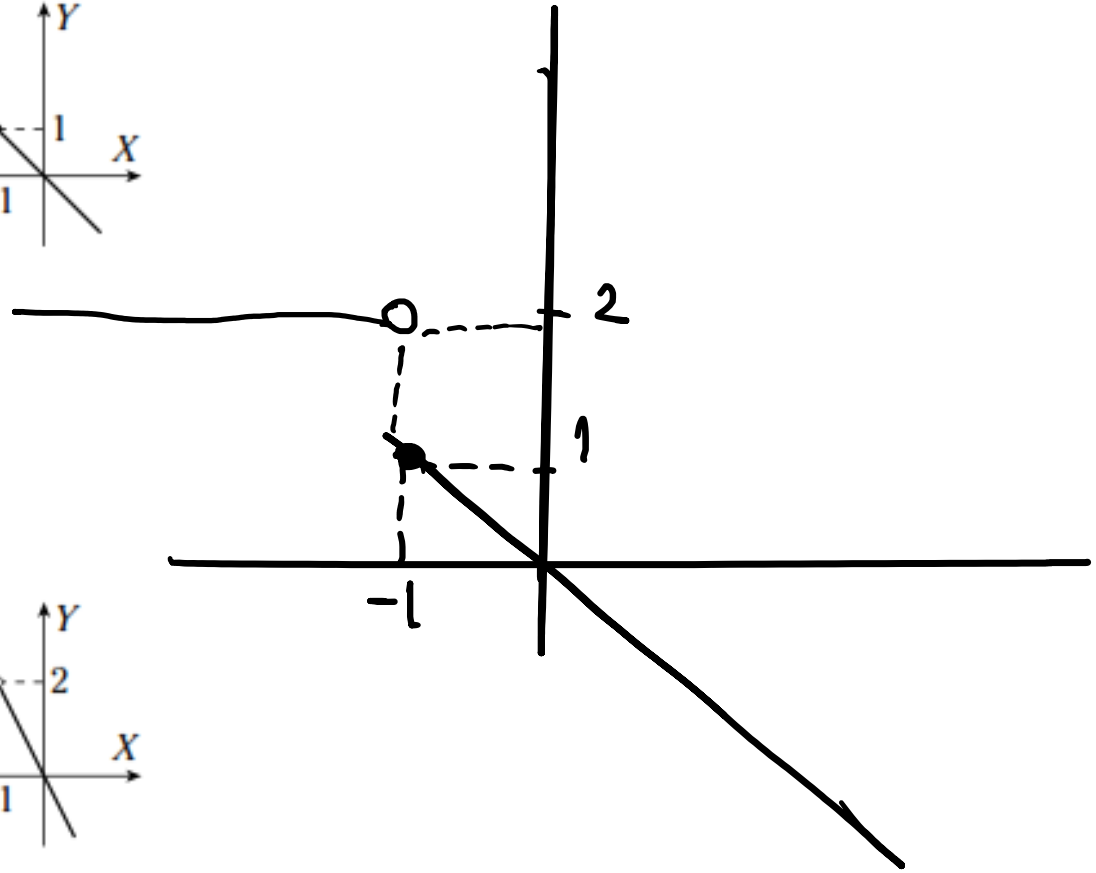


D)

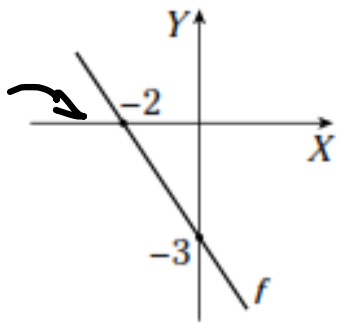


E)





3. Determine la regla de correspondencia de $f_{(x)}$ si su gráfica se muestra a continuación:



A) $f_{(x)} = -\frac{2}{3}x - 5$

B) $f_{(x)} = -\frac{3}{2}x - 2$

C) $f_{(x)} = -\frac{3}{2}x - 3$

D) $f_{(x)} = -\frac{x}{3} - 3$

E) $f_{(x)} = -\frac{2}{3}x - 3$

$f(x) = ax + b$

$TI = b = -3$

$f(x) = ax - 3$

$RAIZ = -2 \rightarrow f(-2) = 0$

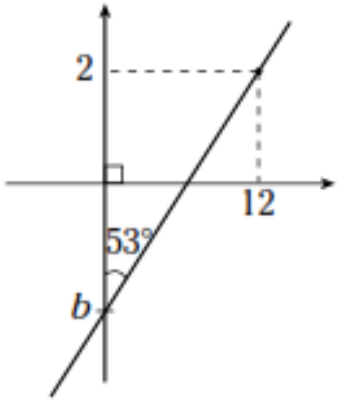
$\Rightarrow f(-2) = a(-2) - 3 = 0$

$\boxed{a = -\frac{3}{2}}$

$\therefore f(x) = -\frac{3}{2}x - 3$

FUNCIONES ESPECIALES

4. Dada la gráfica de la función $f_{(x)}=mx+b$



halle el valor de b.

A) -8 B) -10 C) -12
D) -17 E) -7

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS